GEOMETRÍA AFÍN EN EL ESPACIO. MATEMÁTICAS II

1. Ecuación del plano que pasa por $A(1,1,0)$ y contiene a los vectores $\vec{u} = (0,1,-1)$ y $\vec{v} = (1,2,3)$

Solución: $\pi \equiv 5x - y - z - 4 = 0$

2. Ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,1,2)$ y $C(-1,-1,-1)$

Solución: $\pi \equiv x - z = 0$

3. Ecuación del plano que corta a los tres ejes coordenados en puntos situados a una distancia a del origen.

Solución: $\pi \equiv x + y + z - a = 0$

4. Halla la ecuación paramétrica del plano:

$$3x - y + 2z - 1 = 0$$

Solución:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & \frac{1}{3} & + & \frac{\lambda}{3} & - & \frac{2\beta}{3} \\ y & = & \lambda & & & & \\ z & = & \beta & & & & \end{array} \right.$$

5. Ecuación del plano que pasa por el punto $(3,1,-2)$ y cuyo vector característico es $\vec{v} = (2,-1,3)$

Solución: $\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$

6. Halla las ecuaciones de la recta, en forma vectorial, paramétrica, contínua y general, que incide en el punto $A(3,-2,5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (2,-1,3)$

Solución: $\left\{ \begin{array}{lllllll} x & + & 2y & + & 1 & = 0 \\ 3x & - & 2z & + & 1 & = 0 \end{array} \right.$ $\quad \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-5}{3}$

7. Comprobar si los planos siguientes determinan rectas. En caso afirmativo, pasar dichas ecuaciones a forma paramétrica:

a) $\left\{ \begin{array}{llllll} x & - & 3y & + & z & -6 = 0 \\ x & - & y & + & z & = 0 \end{array} \right.$

Solución: $r \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & -3 & - & t \\ y & = & -3 & & \\ z & = & & & t \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{ll} x & = 2 \\ y & = 0 \end{array} \right.$.

Solución: $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{llll} x & + & 2y & = 0 \\ y & - & z & = 2 \end{array} \right.$

Solución: $r \equiv \left\{ \begin{array}{lrr} x = & & -2t \\ y = & & t \\ z = & -2 & +t \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{ll} z & = 2 \\ y & = 0 \end{array} \right.$

Solución: $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \end{array} \right.$

8. Escribe la ecuación general o implícita de la recta:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$$

Solución: $\left\{ \begin{array}{llllll} 3x & - & 2y & + & 2 & = 0 \\ 4x & - & 2z & - & 4 & = 0 \end{array} \right.$

9. Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & = 2z & +2 \\ y & = z & -1 \end{array} \right.$$

que pasa por el punto $(0, -2, 0)$

Solución: $r \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x & = 2\lambda & \\ y & = -2 & +\lambda \\ z & = \lambda & \end{array} \right.$

10. ¿Están alineados los puntos $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$?

Solución: No.

11. Halla el vector director de la recta:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 2x & + & y & - & 3z & = 0 \\ z & = & 1 & & & \end{array} \right.$$

Solución: $(-1, 1, 0)$

12. Ecuación implícita del plano determinado por el punto $A(1,2,3)$ y los vectores: $\vec{u} = (1,-1,4)$ y $\vec{v} = (1,1,-2)$

Solución: $x - 3y - z + 8 = 0$

13. Ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrl} 2x & - & z & = 1 \\ x & - & 2y & = 0 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x & = z & +1 \\ y & = -z & \end{array} \right.$$

Solución: $5x + 2y - 3z = 0$

14. Ecuación del plano que pasa por $A(1,0,0)$ y contiene a la recta:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 2 & + & t \\ y & = & 3 & - & 3t \\ z & = & 4 & + & 2t \end{array} \right.$$

Solución: $9x + y - 3z - 9 = 0$

15. Ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos: $\pi \equiv x + y - 5z + 4 = 0$ y $\alpha \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$

Solución:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & -\dfrac{3}{4} & + & \dfrac{3\lambda}{4} \\ x & = & -\dfrac{13}{4} & + & \dfrac{17\lambda}{4} \\ z & = & \lambda & & \end{array} \right.$$

16. Ecuación general de las rectas paralelas a los ejes coordenados que pasan por el punto $A(1,1,1)$.

Solución: Recta paralala al eje OX: $\left\{ \begin{array}{cccl} y & - & 1 & = 0 \\ z & - & 1 & = 0 \end{array} \right.$

Recta paralala al eje OY: $\left\{ \begin{array}{cccl} x & - & 1 & = 0 \\ z & - & 1 & = 0 \end{array} \right.$

Recta paralala al eje OZ: $\left\{ \begin{array}{cccl} x & - & 1 & = 0 \\ y & - & 1 & = 0 \end{array} \right.$

17. Ecuación de los planos paralelos a los planos coordenados que pasan por el punto $A(1,1,1)$.

Solución: $\pi_1 \equiv x - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv y - 1 = 0$, $\pi_3 \equiv z - 1 = 0$

18. Ecuación del plano que pasa por el punto $A(-4,3,6)$ y cuyo vector característico es $\vec{v} = (3,-4,5)$

Solución: $\pi \equiv 3x - 4y + 5z - 6 = 0$

19. Sea π el plano de ecuación:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & + & 3t & - & 2s \\ y & = & -2 & + & 4t & - & 5s \\ z & = & 6 & - & t & + & s \end{array} \right.$$

a) Determinar dos puntos del plano.

Solución: $(5,-2,6)$,$(8,2,5)$

b) Calcular la ecuación de dos rectas secantes contenidas en el plano.

Solución:
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & + & 3t \\ y & = & -2 & + & 4t \\ z & = & 6 & - & t \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & - & 2s \\ y & = & -2 & - & 5s \\ z & = & 6 & + & s \end{array} \right.$$

c) Ecuación general del plano.

Solución: $\pi \equiv x + y + 7z - 45 = 0$

20. Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{2x+2}{4} = \frac{y-3}{4} = -z-5 \qquad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{-z-5}{2}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a las dos.

Solución: $\pi \equiv 3x - y + 2z + 16 = 0$

21. Dados los puntos $A(1,0,4)$, $B(3,0,1)$, $C(2,0,0)$ y $D(0,4,0)$, comprobar si son o no coplanarios.

Solución: No son coplanarios.

22. Ecuaciones de los lados del triángulo de vértices: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$

Solución: Recta que contiene al lado AB:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & \lambda \\ y & = & & & \lambda \\ z & = & 0 & & \end{array} \right.$$

Recta que contiene al lado AC:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & \lambda \\ y & = & 0 & & \\ z & = & & & \lambda \end{array} \right.$$

Recta que contiene al lado BC:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 0 & & \\ y & = & 1 & - & \lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array} \right.$$

23. Comprobar que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,3,5)$ y $C(2,4,3)$ no están alineados.

Solución: $\vec{AB} = (1,2,3), \vec{BC} = (-1,1,-2)$

24. Estudiar la posición relativa de las rectas:

a) $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & x + \sqrt{2} \end{array} \right.$ $\qquad s \equiv x = -y = -z$

Solución: Se cruzan.

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ $\qquad s \equiv x = 1 - y = 1 - 2z$

Solución: Se cruzan.

25. Estudiar la posición relativa de los planos:

a) $\pi \equiv 3x - 4y + 2z - 1 = 0$ $\qquad \alpha \equiv -6x + 8y - 4z + 2 = 0$

Solución: Coincidentes.

b) $\pi \equiv x + y = 2$ $\qquad \alpha \equiv x - 2y + 2z = 3$ $\qquad \beta \equiv -x - y = 2$

Solución: π es paralelo a β y α los corta.

c) $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 11$ $\qquad \alpha \equiv 3x - y + 2z = 14$ $\qquad \beta \equiv 4x - 2y - 3z = 9$

Solución: Se cortan en un punto.

d) $\pi \equiv 2x+y-z+6 = 0$ $\qquad \alpha \equiv 3x-y+z+5 = 0$ $\qquad \beta \equiv 4x+2y-2z+1 = 0$

Solución: π es paralelo a β y α los corta.

e) $\pi \equiv 3x - y + z = -1$ $\qquad \alpha \equiv 6x - 2y + 2z = 7$

Solución: π es paralelo a α.

26. Comprobar si las rectas son o no coplanarias, y en su caso, hallar el punto de intersección:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2z + 1 \\ y & = & 3z + 2 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & z + 4 \\ y & = & 2z + 7 \end{array} \right.$$

Solución: Las rectas se cruzan, no son coplanarias.

27. Posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 5z & = & 3(x-3) + 10 \\ 5y & = & x + 2 \end{array} \right. \qquad s \equiv \frac{-x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$$

Solución: Se cruzan

28. Hallar la posición relativa de los planos $\pi \equiv x - y + z = 2$ y β que es el plano que pasa por el punto $P(0,2,0)$ y contiene a la recta: $r \equiv x = y = 1 - z$

Solución: Los planos se cortan en una recta.

29. Posición relativa del plano que pasa por $A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$ y la recta:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3k & - & 1 \\ y & = & k & + & 2 \\ z & = & 2k & & \end{array} \right.$$

Solución: La recta y el plano se cortan en el punto $P(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5})$

30. Ecuaciones de la recta paralela al vector $\vec{u} = (1,2,3)$ y que corte a las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2z & + & 1 \\ y & = & -z & + & 2 \end{array} \right. \qquad s \equiv \frac{-x+1}{-2} = \frac{y+2}{3} = z$$

Solución: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$